**Klaus Peters, 2006**

# Was ist Dialektik?

**Teil 1**

*Vortrag am Institut für Sozialwissenschaftliche Forschung in München. 2006.*

**Inhalt:**



## 1. Appetit auf mehr Wissen

Der erste Satz der Metaphysik des Aristoteles lautet: „Alle Menschen streben von Natur aus nach Wissen."

‚Von Natur aus' soll heißen: ‚auch ohne einen äußeren Anstoß', oder: ‚nicht erst im Notfall'. Also: Es liegt im Wesen der Menschen, - es gehört zu dem, was sie sind, nach Wissen zu streben. Ablesbar sei das, schreibt Aristoteles weiter, an den Sinneswahrnehmungen, denn diese würden um ihrer selbst willen geliebt, auch abgelöst von ihrer Nützlichkeit, Brauchbarkeit oder Anwendbarkeit.

Leibniz hat dieses Streben zweitausend Jahre später als eine Art Appetit (*appetition*) der Monade bestimmt: sie hat nicht nur Perzeptionen, sondern auch einen inneren Antrieb, von vorhandenen Perzeptionen zu immer neuen Perzeptionen fortzuschreiten. Dieser Antrieb gehört zum Begriff der Monade; erst durch ihn oder mit ihm ist die Monade, was sie ist. Für das menschliche Individuum heißt das: Es hat – und zwar schon alleine deswegen, weil es ein Individuum ist, – Appetit auf Wissen.

Man wird diesen Gedanken heute gegen Auffassungen verteidigen müssen, die das Prinzip der Wissensentwicklung vom Individuum weg in seine Umgebungsbedingungen verlagern wollen. Danach hätte das Individuum eine ihm natürlicherweise innewohnende Tendenz, einmal vorhandene Wissensbestände so lange wie möglich zu konservieren und zu verteidigen. Neues Wissen entstünde immer nur dann, wenn altes Wissen durch Irritationen von außen destabilisiert und das an absoluter Appetitlosigkeit leidende Subjekt zur Weiterentwicklung seines Wissens gezwungen würde. Erkennen und Lernen müßten dann als Anpassungen an neue Umweltbedingungen verstanden werden.

Ich gehe mit Aristoteles und Leibniz von der entgegengesetzten Annahme aus, nämlich davon, daß der Antrieb zur Wissensvermehrung im Individuum selber liegt. Für die Befriedigung dieses Antriebs bedarf es äußerer Gegenstände – neuer Wahrnehmungen und Erfahrungen -, aber nicht als Störfaktoren, sondern als Objekten der Begierde – daher die ebenso ontologische, wie logische Relevanz des Eros bei Platon (der begehrte Gegenstand zieht das Individuum an, während die Irritation es vor sich her treibt).

Bei der Wissensvermehrung handelt es sich dann nicht um eine Anpassungsleistung, sondern um Individualitätsentfaltung und -bereicherung – mit der wesentlichen Folge, daß *Widerstände gegen neues Wissen* nicht aus der Natur des Erkennens oder des erkennenden Subjekts, sondern *als Folge von Einschränkungen der Individualität* begriffen werden müßten. Was aus Sicht der ‚Irritationstheorie' als konstante Bedingung der Wissensentwicklung erscheint, wird damit zur Aufgabe der Wissensentwicklung, zum zu verändernden Gegenstand. Und erst die Wissenschaft, die zusammen mit der Aufgabe einer Vermehrung von Wissen auch die Aufgabe einer Überwindung und Ausräumung der gegen eine solche Vermehrung gerichteten Widerstände auf sich nähme, würde ihrem Begriff gerecht.

## 2. Das technische Wissen und die Weltinterpretation

Aus dieser Perspektive läßt sich von einem Doppelcharakter der Wissenschaft sprechen. Sie hat es nie nur mit dem bis dahin noch unerkannten Gegenstand zu tun, sondern dabei immer zugleich mit den bis dahin unüberwundenen Schranken der Individualitätsentwicklung (womit nicht die Entwicklung von Individuen gemeint ist, sondern die historische Herausbildung und Fortentwicklung der Individualität selbst). Oder: Indem den Menschen die äußere Natur zum Problem wird, werden sie sich in eins damit selbst zum Problem – *und umgekehrt.* Aber davon wissen die Menschen am Anfang noch nichts. Das Wissen ist sich selbst noch unbekannt. Darum entwickelt sich die Problemeinheit unter der Form einer Dualität von Problemstellungen:

- Probleme, bei denen neues Wissen *als Mittel zum Zweck von Problemlösungen* gesucht wird (Wissen, das angewendet werden soll),
- und Probleme, bei denen neues Wissen als die *Problemlösung* selbst gesucht wird (also Wissen, das nicht wegen seiner Anwendbarkeit gesucht wird, sondern um seiner selbst willen).

Mit dem ersten Problemtyp haben wir es in technisch-praktischen Zusammenhängen zu tun; als Beispiel kann die Frage dienen: Wie kann man auf hoher See die Orientierung behalten, wenn die Küste hinter dem Horizont verschwunden ist?

Mit dem zweiten Problemtyp haben wir es überall dort zu tun, wo die Menschen sich und ihre Lage in der Welt zu verstehen suchen. Als Beispiel kann die Frage dienen, ob und wenn ja, wann und wie und warum die Welt angefangen habe.

Im ersten Fall spreche ich abkürzungshalber von der Entwicklung *technischen Wissens* (wobei das Wort ‚technisch' im allerweitesten Sinn zu verstehen ist), im zweiten von der Entwicklung der *Weltinterpretation* (womit ich mich der Ausdrucksweise der 11. Feuerbachthese von Karl Marx anschließen will).

Meine These lautet nun, daß die Philosophie dort entsteht, wo sich hinter der oberflächlichen Getrenntheit dieser beiden Entwicklungsbahnen die tatsächliche Einheit beider geltend macht, indem nämlich

- einerseits das bei der Lösung technisch-praktischer Probleme gewonnene Wissen in die Interpretation der Welt einzufließen beginnt,
- und andererseits die Resultate des technischen Wissens selbst unabweisbare Interpretationsprobleme aufwerfen.

Die Dialektik wird in dem genauen historischen Augenblick entdeckt, in dem diese beiden Momente zum ersten Mal zu einer perfekten Deckung kommen. Meine folgenden Ausführungen sind von der Überzeugung geleitet, daß sich die Dialektik am besten erklären läßt, indem man Licht in diesen historischen Augenblick bringt.

Sein Datum läßt sich mit erstaunlicher Genauigkeit angeben: zwischen 520 und 470 vor unserer Zeitrechnung hat es sich ereignet. Und man weiß auch wo, nämlich in zwei griechischen Kolonien: erstens in Elea, das ein wenig südlich vom heutigen Neapel lag - nicht weit von den großen Tempelanlagen von Paestum. Und zweitens in Ephesos, das an der Ägäisküste lag in der Gegend des heutigen Izmir.

Ich will nun im folgenden

a) erstens diejenige technisch-praktische Problemstellung erläutern, die als Voraussetzung für die Entdeckung der Dialektik bewertet werden muß,
b) zweitens so kurz wie möglich die Entwicklung der philosophischen Weltinterpretation skizzieren, die der Entdeckung der Dialektik vorangegangen ist (sozusagen die Vorgeschichte der europäischen Philosophie)
c) und drittens darzustellen versuchen, wie diese beiden Entwicklungslinien in Elea aufeinandergetroffen sind. (Aus Zeitgründen beschränken sich die folgenden Ausführungen auf Elea und lassen Ephesos links liegen.)

Hoffentlich langweilt es niemanden, wenn ich mich beim ersten Punkt (beim Technisch-Praktischen) etwas länger aufhalte, als es unbedingt nötig wäre; ich verfolge damit weniger den Zweck einer Wissensvermittlung, als vielmehr den Zweck, einen originären Zugang zu der ursprünglichen Denkerfahrung zu eröffnen, die die Entdeckung der Dialektik motiviert hat.

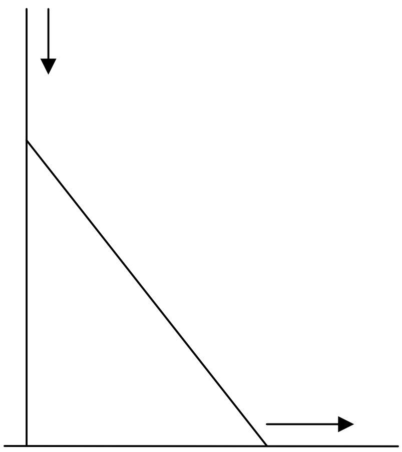
### 3. Der rechte Winkel von Babylon

Im Britischen Museum in London wird eine etwa 4000 Jahre alte babylonische Keilschrifttafel aufbewahrt, auf der sich in Stein gemeißelt die wohl älteste (bekannte) Geometrieaufgabe der Welt befindet. Wenn man sie einigermaßen wörtlich ins Deutsche übersetzt, hört sich das so an:

**Ein Balken 30.**
**Von oben ist er 6 herabgekommen.**
**Von unten was hat er sich entfernt.**
**30 quadriere. 15 siehst du.**
**6 von 30 abgezogen. 24 siehst du.**
**24 quadriere. 9,36 siehst du.**
**9,36 von 15 ziehe ab. 5,24 siehst du.**
**5,24 hat was als Quadratwurzel. 18.**
**18 am Boden hat er sich entfernt.**

Die ersten drei Zeilen enthalten offenkundig eine Aufgabe, die in den anschließenden fünf Zeilen gelöst wird. Die letzte Zeile hält dann noch einmal das Ergebnis als Ergebnis fest.

Den Sinn der Aufgabe muß man in diesem Fall aus der Lösung rekonstruieren. Es geht um folgendes: Ein Balken von einer bestimmten Länge („30") steht senkrecht an einer Wand, und nun zieht man sein unteres Ende so von dieser Wand weg, daß dabei sein oberes Ende an der Wand heruntergleitet.



Die Frage heißt: Wieweit muß man ihn unten von der Wand wegziehen, damit er oben um ein Fünftel seiner eigenen Länge („6") herunterkommt?

Die technische Relevanz des Problems ist offenkundig. Solche Aufgaben stellen sich in der Praxis, etwa beim Bauen.

Die Lösung in den letzten sechs Zeilen sieht wegen der auf unterschiedlicher Basis gebildeten babylonischen Zahlen komplizierter aus, als sie ist. Wenn man alle Zahlen ins heutige Dezimalsystem übersetzt, wird die Sache schon deutlicher:

**Die Aufgabe:**

```
(1.) Ein Balken 30.
(2.) Von oben ist er 6 herabgekommen.
(3.) Von unten was hat er sich entfernt.
Die Lösung:
(4.) 30 quadriere. 900 siehst du.
(5.) 6 von 30 abgezogen. 24 siehst du.
(6.) 24 quadriere. 576 siehst du.
(7.) 576 von 900 ziehe ab. 324 siehst du.
(8.) 324 hat was als Quadratwurzel. 18.
Das Ergebnis:
(9.) 18 am Boden hat er sich entfernt.
```

Unnötig zu sagen, daß die Lösung stimmt. Sie setzt voraus oder macht sich zunutze, daß durch das Wegziehen des Balkens am Boden ein rechtwinkliges Dreieck entsteht. Von diesem Dreieck kennen wir zwei Seitenlängen: die erste (‚schiefe') ist identisch mit der Länge des Balkens, die zweite (senkrechte) kann man ausrechnen: ursprünglich war sie so lang wie der Balken, also 30, hat sich dann aber um 6 verkürzt und ist jetzt also noch 24 lang (siehe Zeile 5).

Wenn man die Längen von zwei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks kennt, kann man die Länge seiner dritten Seite berechnen – und zwar nach dem bekannten ‚Satz des Pythagoras': $a^2 + b^2 = c^2$. Wenn nach a gefragt wird, muß man den Satz entsprechend umformen: Nachdem man $c^2$ und $b^2$ ausgerechnet hat (siehe die Zeilen 4 und 6), muß man $b^2$ von $c^2$ subtrahieren (siehe Zeile 7) und dann aus dem Ergebnis die Wurzel ziehen (Zeile 8). Also: Wenn $a^2 + b^2 = c^2$ ist, dann ist $a^2 = c^2 - b^2$ und $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ .

Genau so hat man also vor 4000 Jahren auch schon gerechnet. Zwar kannte die babylonische Mathematik noch keine Variablen (a, b und c). Sie kannte aber den einfachsten Fall: Wenn sich in einem Dreieck die Seiten wie 3 zu 4 zu 5 verhalten, liegt am Schnittpunkt der beiden kürzeren Seiten ein rechter Winkel. Aus der allgemeinen Formel $a^2 + b^2 = c^2$ wird dann der bestimmte Fall: $3^2 + 4^2 = 5^2$ ($9 + 16 = 25$). - Das Seitenverhältnis von 3, 4 und 5 ist heute noch im Handwerk als die ‚Tischlerregel' bekannt.

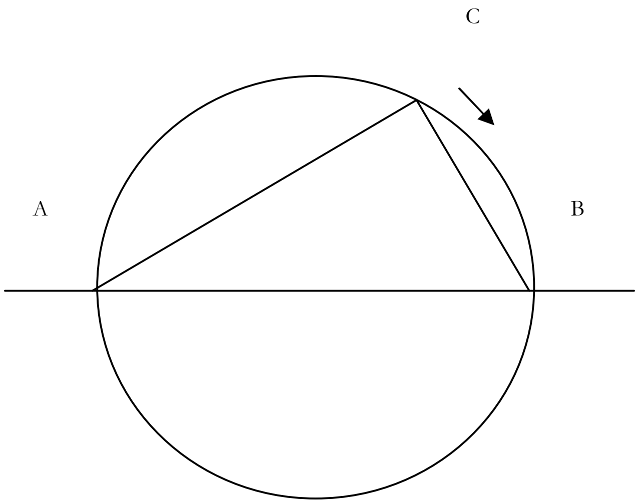
Auf der Keilschrifttafel sind die drei Zahlen 3, 4, und 5 versteckt worden, indem man sie jeweils mit 6 multipliziert und 18, 24 und 30 daraus gemacht hat (der Multiplikationsfaktor wird in der zweiten Zeile der Aufgabe ‚verraten'), was ebenso wie die versteckte Länge der Senkrechten als mutwillige Erschwerung gewertet werden muß, woraus sich wiederum mit Sicherheit schließen läßt. daß es sich bei dieser Keilschrifttafel um eine Art Lehrmittel gehandelt hat und bei der Aufgabe um eine Übungsaufgabe zu Studienzwecken.

Der ‚Satz des Pythagoras' ist der älteste mathematische Lehrsatz, zu dem es allerdings noch ein ebenso altes Gegenstück gibt, den ‚Satz des Thales', der interessanterweise dasselbe Problem löst wie der ‚Pythagoras', nur auf eine andere Weise.

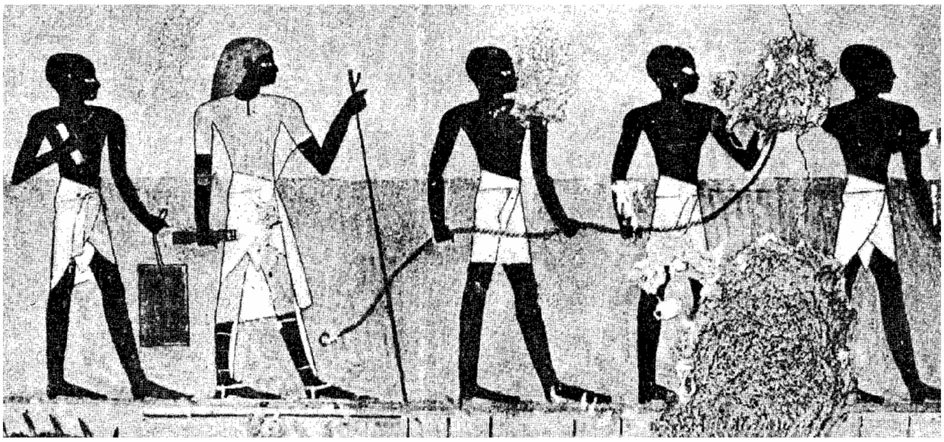
Der ‚Thales' konstruiert den rechten Winkel dadurch, daß er von den beiden Punkten, an denen ein Kreisdurchmesser den Kreisumfang schneidet - A und B -, Verbindungslinien zu einem beliebigen Punkt C auf der Kreisperipherie zieht; diese beiden Verbindungslinien AC und BC bilden an der Peripherie immer einen rechten Winkel – gleichgültig, an welchem Punkt sie auf die Kreislinie treffen.

Wenn wir uns vorstellen, daß von A über C ein durchgehendes Seil nach B gespannt ist, so kann man den Punkt C beliebig auf der Kreislinie herumschieben: Das Dreieck verändert dabei seine Form, aber der Winkel in C bleibt immer gleich groß, nämlich ein rechter Winkel.

Das Seil spielt dabei die Rolle eines elementaren geometrischen Instruments: Wenn man es spannt, entsteht eine gerade Linie (Lineal). Wenn man es an einem Ende befestigt und mit dem anderen zu laufen anfängt, entsteht ein Kreis (Zirkel). Und wenn man gerade Linien und Kreise konstruieren kann und also über Zirkel und Lineal verfügt, dann kann man dank des ‚Thales' auch rechte Winkel konstruieren.




Es ist darum gar nicht überraschend, daß uns dieses Seil auf den Wänden ägyptischer Pyramiden wieder begegnet. Dort finden sich Darstellungen von Menschen, die ein solches Seil tragen. Es sind Landvermesser – unterwegs zum nächsten rechten Winkel.



*Landvermesser - Ägypten 1475 v. Chr.*
*(Man beachte Hemd und längeren Rock als Statussymbole des ‚Wissensarbeiters')*

Neben der Landvermessung gibt es noch weitere lebenswichtige praktische Fälle, in denen die Menschen darauf angewiesen sind, solche Winkel konstruieren zu können: beim Bauen großer Gebäude zum Beispiel und bei der Navigation auf hoher See, wenn die Küste nicht mehr zu sehen ist.

Man geht wohl nicht fehl, wenn man die Konstruierbarkeit des rechten Winkels als den Anfang und die Basis jeder wissenschaftlichen Fundierung technischer Problemlösungen überhaupt betrachtet.

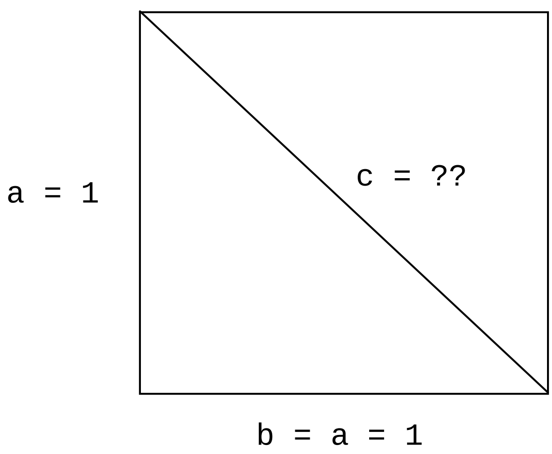
## 4. Die unaussprechliche Lösung des technischen Problems

Ich will nun, um den Absturz von der Mathematik in die Dialektik vorzubereiten, die Aufgabe, die sich auf der babylonischen Keilschrifttafel findet, geringfügig abwandeln. Stellen wir uns vor, daß die Vorschrift in Zeile 2 („6 ist er herabgekommen") verändert wird: Der Balken soll nicht um eine bestimmte vorgegebene Distanz an der Wand herunterrutschen, sondern er soll so lange herunterrutschen, bis die Entfernung des oberen Balkenendes vom Fußboden - die Strecke a – genauso groß ist wie die Entfernung des unten weggezogenen Balkenendes von der Wand – die Strecke b.

In diesem Fall entstünde also eine besonders regelmäßige Figur, nämlich ein nicht nur rechtwinkliges, sondern darüber hinaus gleichschenkliges Dreieck. Und es ist wohl klar, daß das eine praxisnahe Problemstellung ist und kein ungewöhnlicher, an den Haaren herbeigezogener Fall.

Wenn man nun aber für diesen ebenso harmonischen, wie praxisnahen Fall die babylonische Frage wiederholt: „Wieweit am Boden hat er sich entfernt?", so erlebt man sein blaues Wunder.

Man stellt nämlich fest, daß alle Rechenkünste der Welt nicht ausreichen, um diesen Abstand zu bestimmen. Wenn man weiß, wie lang der Balken ist, kann man nicht ausrechnen, wieweit man ihn unten von der Wand wegziehen muß, damit sein oberes Ende genauso weit vom Boden entfernt ist, wie sein unteres Ende von der Wand.




Man kann natürlich versuchen die Sache umzudrehen. Legen wir unseren babylonischen Balken zur Seite und einigen uns auf eine bestimmte Länge von a und b, die wir nun kennen, da wir sie selbst bestimmt haben. Das blaue Wunder holt uns aber wieder ein, sobald wir wissen wollen, wie lang denn unter dieser Voraussetzung der Balken sein muß, mit dem wir die beiden Endpunkte von a und b zu einem gleichschenkligen Dreieck verbinden können. Es läßt sich schlechterdings nicht sagen, wie lang dieser Balken sein muß.

Das Problem ist in die Wissenschaftsgeschichte eingegangen als das Problem der Quadratdiagonalen.

Rechnerisch stellt sich die Sache folgendermaßen dar:

Man fragt nach der Länge von c für den Fall, daß a und b gleich lang sind. Aus $a^2 + b^2 = c^2$ wird dann: $a^2 + a^2 = c^2$ oder kurz: $c^2 = 2a^2$.

Demnach ist dann $c = \sqrt{2a^2}$ , was sich, da man aus $a^2$ die Wurzel ziehen kann, verkürzen läßt auf $c = a * \sqrt{2}$ . Richtig! Aber was, bitte schön, soll man mit diesem Resultat anfangen?

Wenn man die Länge der Diagonale (des schiefen Balkens) als bekannt voraussetzt und nach der Länge der Quadratseite fragt, ergibt sich $a = c / \sqrt{2}$ . Wir werden die Wurzel aus 2 also nicht los. Sie wäre der Umrechnungsfaktor, den wir benutzen müßten, um aus der Länge der Diagonale die Länge der Seite oder aus der Länge der Seite die Diagonale berechnen zu können. Das wissen wir nun. Aber wir wissen nicht, wie man die Wurzel aus 2 in eine Zahl umwandeln kann, mit der man rechnen könnte.

Versuchen wir uns vorzustellen, was diese Entdeckung für die Menschen vor 4000 oder 3000 Jahren bedeutet haben wird. Vor allem stellt sich ja bei so einer Gelegenheit die Frage, ob man hier nur an die Grenzen der eigenen Fähigkeiten stößt – ob man also das Rechnen einfach noch nicht gut genug beherrscht, oder ob dieses einfache und gar nicht an den Haaren herbeigezogene Problem am Ende tatsächlich unlösbar sein sollte, - wobei die zweite Möglichkeit jedenfalls unwahrscheinlicher ausgesehen haben wird als die erste.

Und nun kommt es in der Entwicklung der antiken Mathematik zu einer Detonation, nämlich *zum ersten Unmöglichkeitsbeweis in der Geschichte des menschlichen Denkens.*

Man konnte *beweisen*, daß wir es hier mit dem unwahrscheinlicheren der beiden möglichen Fälle zu tun haben: Nicht unsere mangelnden Kenntnisse sind schuld daran, daß wir die Lösung nicht finden, sondern es gibt für den Fall der Wurzel aus 2 keine Lösung – jedenfalls keine, die sich hinschreiben oder aussprechen läßt -, und daß das so ist, *läßt sich beweisen*.

Das Ergebnis des Beweises bedeutet, daß Seite und Diagonale eines Quadrats kein gemeinsames Maß haben, daß sie also *inkommensurabel* sind. Rechnerisch ergibt sich eine *Irrationalzahl*, die nach der populären Definition eine ‚Zahl mit unendlich vielen Stellen hinter dem Komma' ist. Diese Definition ist ergänzungsbedürftig, da es auch rationale Zahlen ‚mit unendlich vielen Stellen hinter dem Komma' gibt, etwa den Dezimalbruch von 1/3. Aber wenn man 1 durch 3 dividiert, kennt man sämtliche Ziffern, die hinter dem Komma vorkommen: es sind ausschließlich Dreien. Eben das ist bei einer Irrationalzahl anders. Sie ist nicht bloß eine ‚Zahl mit unendlich vielen Stellen hinter dem Komma', sondern eine, bei der man die Ziffernfolge hinter dem Komme *nicht von vornherein kennen kann*.

Darum kann man über diese Ziffernfolge keine Voraussagen machen. Entweder rechnet man die Nachkommastellen der Wurzel aus 2 einzeln aus, oder man kennt sie nicht. Unendlich lange kann man nicht rechnen. Also *kann* *man die Zahl nicht kennen*, die sich aus der Wurzel aus 2 ergibt, und aussprechen kann man sie schon gar nicht.

Daß ist das Ergebnis des Unmöglichkeitsbeweises. Er ist hieb- und stichfest. Keine Rechenkünste und keine Rechenmaschinen können daran jemals etwas ändern. Und das weiß man im voraus. Mit absoluter Gewißheit. Man muß nicht abwarten, was der wissenschaftlich-technische Fortschritt noch bringen wird. Computer, die mit irrationalen Zahlen rechnen, sind nicht ‚bis jetzt noch nicht erfunden worden', sondern können aus prinzipiellen Gründen nicht erfunden werden. Man kann Computern die Aufgabe übertragen, die Nachkommastellen der Wurzel aus 2 auszurechnen, aber sie kommen dabei genausowenig an ein Ende wie Menschen. Wegen des Unmöglichkeitsbeweises haben wir ein absolut sicheres Wissen davon, d.h. wir *kennen* die absolute Wahrheit (wenigstens für diesen einen Fall).

Irgendwann muß man das Ausrechnen der Nachkommastellen unterbrechen (selbst eine Maschine hört irgendwann auf zu funktionieren), und die Zahl, bei der man dann angekommen ist, ist der gesuchten Zahl nahe, aber es ist *nicht die gesuchte Zahl*, sondern eine andere, nämlich rationale Zahl mit endlich vielen Stellen hinter dem Komma, und nur weil sie rational ist, können wir sie dann aussprechen und mit ihr weiterrechnen oder einen Computer mit ihr füttern. Wenn man will, kann man sie der gesuchten Zahl immer weiter annähern. Aufgrund des Unmöglichkeitsbeweises können wir aber vorher wissen, daß wir bei solchen Annäherungen nie bis zur gesuchten Zahl vordringen, so daß sich hier eine merkwürdige Kombination von Endlichkeit und Unendlichkeit ergibt, nämlich *die unendliche Annäherung an ein tatsächlich vorhandenes Ende* (das Ende der Quadratdiagonale oder der Quadratseite).

Zu denken, daß man sich ins Unendliche entfernen und also z.B. beim Zählen nie zu einer letzten Zahl kommen kann, fordert unseren Verstand eigentlich schon genug heraus. Aber eine unendliche Annäherung ist noch weitaus beunruhigender – eine Art Paradoxie zweiten Grades.

Ich füge den Beweis im Anhang bei. Wir brauchen ihn hier nicht im einzelnen durchzunehmen. Interessant ist in unserem Zusammenhang nur, daß er indirekt geführt wird, d.h. man setzt voraus, daß es eine Lösung gibt, und zeigt dann, daß diese Voraussetzung mit Notwendigkeit in einen Selbstwiderspruch führt, woraus wiederum zwingend folgt, daß es für die Wurzel aus 2 keine ‚rationale' Lösung gibt.

Niemand weiß, wie alt dieser Beweis ist, und schon gar nicht weiß man, wer ihn gefunden hat. Er ist auf jeden Fall älter als die Entdeckung der Dialektik, scheint aber andererseits jünger zu sein als die babylonische Mathematik. Da ich mir, ohne es weiter begründen zu können und zu wollen, schlecht vorstellen kann, daß die Zeitgenossen von Homer ihn schon gekannt haben sollen, siedele ich ihn für meinen Privatbedarf in der Zeit zwischen 700 und 600 vor Chr. an und lasse es mir im übrigen egal sein, ob ich es damit getroffen habe oder nicht.

Der Wert dieses Beweises läßt sich am besten an den Folgen ablesen, die eintreten, wenn ein solcher Beweis nicht gelingt. Außer dem Verhältnis von Quadratseite und Quadratdiagonale hatte die antike Mathematik einen zweiten, ähnlichen Fall gefunden, nämlich das Verhältnis der Länge des Kreisumfangs zur Länge des Kreisdurchmessers. Es handelt sich dabei um die sogenannte

Zahl $\pi$. Auch das ist eine Irrationalzahl, aber die Griechen konnten für diesen Fall den Unmöglichkeitsbeweis nicht führen. Darum hörte die Suche nach dem, was man ‚die letzte Stelle hinter dem Komma der Zahl $\pi$' nennen könnte, nicht auf. Diese Suche ist in die Wissenschaftsgeschichte eingegangen als die Jagd nach der Quadratur des Kreises. Archimedes z.B. war bis zu einer Annäherung vorgedrungen, die der 72. Stelle hinter dem Komma von $\pi$ entsprochen hätte (die Griechen kannten keine Dezimalbrüche und hatten es darum beim Rechnen schwerer). Die Suche hat bis ins 19. Jahrhundert gedauert hat, als endlich einem Mathematiker namens Lindemann gelang, was für die Wurzel aus 2 schon im 7. vorchristlichen Jahrhundert gelungen war.

Insofern hat der Unmöglichkeitsbeweis etwas Beruhigendes. Er erspart uns die ohnehin vergeblichen Bemühungen. Wir sind entlastet. Es liegt nicht an uns, daß wir bei der Wurzel aus 2 keine letzte Stelle hinter dem Komma finden.

## 5. Die Geister scheiden sich

Das, worüber wir beruhigt sein können, erzeugt aber Unruhe. Daß es Dinge in der Welt gibt, für die unser Verstand nicht geschaffen ist, mag ja sein. Gefühle könnten dazu zählen oder Geschmacksurteile, auch der Wahnsinn, Halluzinationen oder Träume (alles, was man sonst ‚irrational' nennt). Aber hier, bei der Quadratdiagonale stößt der Verstand *auf seinem eigenen Terrain* an seine Grenze. Und seine gewissermaßen letzte Tat besteht dann darin zu beweisen, daß er tatsächlich auf unausweichliche Weise an diese seine Grenze stößt und die Beunruhigung nicht etwa wegen eines Denkfehlers entsteht.

Lassen wir dahingestellt, ob diese Unruhe als unwillkommene Irritation oder als geweckter Appetit zu begreifen wäre: hier muß etwas geschehen! Damit ist eingetreten, was ich eingangs angekündigt hatte: *Die Entwicklung des technisch-praktischen Denkens hat zu einem Resultat geführt, das interpretationsbedürftig ist.* Inkommensurabilität und Irrationalzahl werfen Fragen auf, die selbst nicht mehr technisch-praktischer Natur sind. Tatsächlich stellt das Resultat des ersten Unmöglichkeitsbeweises für die Interpretation der Welt eine größere Herausforderung dar, als alle rätselhaften Naturphänomene zusammengenommen.

Wir sind damit an einem Dreh- und Angelpunkt der europäischen Wissenschafts- und Geistesgeschichte angekommen, und an dieser Stelle scheiden sich die Geister.

Die Geister scheiden sich an dieser Stelle bis auf den heutigen Tag und mit weitreichenden Folgen. Die entscheidende Frage betrifft die Interpretationsbedürftigkeit des Beweisresultats selbst und lautet: Kommen wir hier dem inneren Puls der Welt und des menschlichen Denkens näher? Oder ist das ganze eher etwas für Leute, die sonst nichts zu tun haben - eine Art Rätselecke und Kuriositätenkabinett der Wissenschaftsgeschichte?

Inkommensurabilität und Irrationalzahl provozieren bis heute und immer wieder neu heftigste Abwehrreaktionen. Es wird an dieser Stelle komisch wirken, wenn ich hinzufüge: Es sind dabei gar keine politischen Motive am Werk! (das Lachen über diese Komik wird uns leider noch vergehen). Die Gründe für den Widerstand wirken viel früher und liegen viel tiefer. Wir bekommen es hier mit einer psychologischen Dimension von Mathematik und

Logik zu tun. Der Unmöglichkeitsbeweis scheint das Selbstverständnis, wenn nicht geradezu das Selbstwertgefühl nachdenkender Menschen im Kern zu gefährden. Er scheint einen Schmerz hervorzurufen, der im Moment seiner Entstehung betäubt werden muß. Es entsteht die Partei derer, die auf ihre Fahne geschrieben haben: Wir werden uns von diesem Beweis nicht beunruhigen lassen! Wir können ihn zwar nicht erfolgreich widerlegen, aber seine Relevanz können wir erfolgreich bestreiten!

Um der Partei einen Namen zu geben: Es melden sich – erstmals in der Geschichte – die Dogmatiker des Gesunden Menschenverstands. Ihr Manöver läßt sich als eine Kombination aus zwei Spielzügen darstellen: erstens berufen sie sich auf die Praxis (und zwar auf die Praxis der Techniker – wobei hervorgehoben werden muß, daß hier nicht die Techniker sprechen, sondern Leute, die sich, ohne die Techniker vorher zu fragen, auf die Techniker berufen) und zweitens verkleiden sie das Ergebnis dieser Berufung als ihre eigene Überlegenheit, nämlich als Professionalität.

Die Berufung auf die Praxis hört sich so an: Das technische Problem führt zwar zu einem unaussprechlichen Resultat, aber die Unaussprechlichkeit hindert die Bauleute nicht am Bauen, die Landvermesser nicht am Landvermessen und die Navigateure nicht am Navigieren („na also!“). Vor allem kann man daran erinnern, daß die technischen Meßinstrumente – gespannte Seile zumal – ohnehin immer ungenau sind. Und im Wege der unendlichen Annäherung kann man die *rechnerische* Genauigkeit beliebig über die jeweils *technisch realisierbare* Genauigkeit hinaus steigern. Die Restdifferenz zwischen der rechnerisch erreichten Annäherung an die Irrationalzahl und der eigentlich gesuchten Zahl spielt dann ‚in der Praxis keine Rolle’, sie ist *praktisch irrelevant* (wobei mit „praktisch“ gemeint ist: beim Bauen, beim Landvermessen usw.). Wer noch Fragen hat, ist ein Spinner.

Verpackt wird dieses Resultat in Professionalität. Man lernt von den ‚Profis’, daß es Irrationalzahlen ‚gibt’. Das ist eine bestimmte Sorte von Zahlen, die man kennen muß. Hier gibt es nichts zum Wundern, sondern nur etwas zum Lernen. Die Unaussprechlichkeit wird damit in Abfragbarkeit verwandelt, und das Beunruhigende mutiert in etwas, was man wissen muß.

Die Griechen haben es auf unnachahmliche Weise vorgemacht: Die Irrationalzahl hieß bei ihnen ‚to arrheton’, das Unaussprechliche – und dies als *terminus technicus*. Indem man zum Unaussprechlichen „das Unaussprechliche“ sagt, hat man das Unaussprechliche erfolgreich ausgesprochen. Und wer noch Fragen hat, ist ein Laie.

Wenn man einmal so weit gekommen ist, kann man von der inkommensurablen Ausnahme wieder zum kommensurablen Normalfall zurückkehren wie von einer Kinderei zum Ernst des Lebens.

Die Entdeckung der Dialektik ist die Entdeckung der Unwahrheit dieser Sicht der Dinge. Sie ist die Antwort der Weltinterpretation auf die Frage, die der Unmöglichkeitsbeweis aufwirft, und in eins damit die Widerlegung des Dogmatismus des Gesunden Menschenverstandes.

## 6. Von der Pyramide zum Tempel zu den Pythagoräern

Die alten Ägypter haben mit den Pyramiden gigantische geometrische Körper in den Wüstensand gesetzt, Gebäude von einer bis heute nicht wieder erreichten Masse. Sie sind Zeugen einer ins Hypertrophe gesteigerten Kunst der gerade Linien und des rechten Winkels. Als hätten ihnen die Schwierigkeiten nicht gereicht, die das alltägliche Leben für Messungen und Begradigungen bereit hielt, haben sie sich für ihre Götter und toten Herrscher vor Aufgaben mit einem vielfach höheren Schwierigkeitsgrad gestellt. Die Pyramide von Gizeh ist etwa 135 Meter hoch. Bei Baubeginn mußte nicht nur auf allen vier Seiten die gleiche Neigung erreicht werden; es mußten auch an allen vier Ecken so genaue Winkelmessungen durchgeführt werden, daß die vier Kanten der Pyramide sich 135 Meter höher in *einem* Punkt begegneten. Es ist dies eine Kunst, bei der die Abweichung von der geraden Linie und der ebenen Fläche als Fehler oder Ungenauigkeit vorkommt. Es wird dann die Verwirklichung der Absicht nicht ganz gerecht.

Nach der Entdeckung der Inkommensurabilität und ihrer rätselhaften, aber offenkundigen Beziehung zu Harmonie und Schönheit ändert sich die Szenerie: An einem griechischen Tempel gibt es keine geraden Linien, aber nicht, weil die Griechen dazu nicht in der Lage gewesen wären, sondern weil sie keine gerade Linien bauen *wollten*. An die Stelle des Kults der geraden Linie tritt ein Kult der kalkulierten Abweichungen von der geraden Linie, nämlich der harmonischen Größenverhältnisse und der architektonischen Realisierung inkommensurabler Größenverhältnisse im besonderen.

Der Goldene Schnitt wird entdeckt, eine dritte Irrationalzahl, die ein Äußerstes an Harmonie bei der Teilung einer Strecke erreichen will. Er teilt eine Strecke so, daß sich der größere Teil zum kleineren verhält, wie die ganze Strecke zu ihrem größeren Teil.

Einer der ersten Vermesser des Apollontempels von Delphi kam zu dem Schluß: Wer durch die Tür dieses Tempels geht, schreitet durch das *Arrheton*! Der griechische Tempel steht auf einer Grundfläche, die ein Ausschnitt aus einer Kugeloberfläche ist, die Säulen verjüngen sich nicht nur nach oben, sondern wölben sich dabei kaum sichtbar nach außen usw. und alle diese Abweichungen von der Geradheit dienen zusammen mit den Maßverhältnissen der Herstellung von Harmonie. Die Längeneinheit wurde dabei nicht irgendeiner äußeren Norm entnommen, sondern durch ein bestimmtes Bauelement definiert, das man für die Vermessung eines solchen Tempels finden muß (es wurde also nicht in so etwas wie Metern, Fuß oder ähnlichem gerechnet, sondern etwa in Säulenabständen oder -durchmessern).

## 7. Die Vorgeschichte der Philosophie

Man läßt die abendländische Philosophie gewöhnlich mit den Ionischen Naturphilosophen beginnen, und das ist sinnvoll, weil hier zum ersten Mal Interpretationen der Welt erscheinen, die aus den Mythologien ausbrechen und das Prinzip der Welt in der Natur selbst verankern wollen. Viel mehr ist von ihnen auch nicht bekannt. Einmal sollte es offenbar das Wasser sein, aus dem alles gemacht war und ein andermal die Luft.

Man kann ahnen, daß dabei bereits technologisches Wissen für die Weltinterpretation eine Rolle zu spielen beginnt. Ich will damit aber keine Zeit verlieren und greife die Geschichte dort auf, wo das im Technisch-Praktischen angesammelte Wissen unmittelbar für die Interpretation der Welt verwendet worden ist, nämlich bei Pythagoras und den Pythagoräern (der dem Pythagoras zugeschriebene Lehrsatz der Geometrie ist sehr viel älter als Pythagoras; daß er ihm zugeschrieben wurde, ist ein Zeichen für die Verbindung, die ich hier meine).

Anders als die ihnen vorausgegangenen Naturphilosophen suchten sie das Prinzip der Welt nicht in einem Naturstoff, sondern in der Zahl und zwar insbesondere im zahlenmäßigen Ausdruck der Harmonie. Sie gingen nicht nur von harmonischen Größenverhältnissen aus, sondern untersuchten die Verbindungen zwischen der Harmonie in der Geometrie und der Harmonie in der Musik. Das gespannte Seil, das wir eben noch als elementares Lineal betrachtet haben, wird bei ihnen zur Saite, die einen Ton abgibt (durch einen Resonanzkörper kann man ihn hörbar machen), und den Einteilungen der Saite entsprechen unterschiedliche Tonhöhen. Wenn man die Saite halbiert, steigt der Ton um eine Oktave usw.

Die Pythagoräer haben diese Harmonien dann in den Himmel projeziert und zur Grundlage einer Astronomie gemacht, die die Abstände zwischen den Planeten und Himmelssphären so kalkulierte, daß am Ende eine Sphärenharmonie entstand.

## 8. Die Einführung des zwingenden Arguments in die Weltinterpretation

Den Pythagoräern war mit allen vorangegangenen Naturphilosophen eins gemeinsam: sie beriefen sich auf eine immanente Überzeugungskraft ihrer Weltentwürfe. Ihre Lehren sollten ohne weiteres einleuchten. Wenn Mathematik, Musik und Astronomie ein gemeinsames Prinzip haben, wie wollte man sich dem entziehen?

Die abweichende Meinung konnte hier nur als unerleuchtet abgetan werden: Wen die Harmonie nicht überzeugt, hat selber schuld.

Das konnte auf die Dauer nicht ausreichen. Irgendwann wurden von den Weltinterpretatoren Begründungen verlangt. Man wollte Beweise sehen, die mit der Hieb- und Stichfestigkeit des Unmöglichkeitsbeweises für die Wurzel aus 2 mithalten können. Die Dialektik wird in dem Moment entdeckt, in dem zum ersten Mal ein Philosoph auftritt, der seine Interpretation der Welt mit der Behauptung begleitet, daß er auch begründen könne, warum er damit recht hat. Soweit wir wissen – und das wissen wir wahrscheinlich ziemlich genau -, war es Parmenides von Elea, der das erste zwingende Argument in die Weltweisheit einführte. Es hieß: ‚Nur das Sein ist, und das Nicht-Sein ist nicht.'

## Literatur

*Der Text der mesopotamischen Keilschrifttafel stammt aus:*
Gericke, Helmuth (1984): **Mathematik in Antike und Orient**. Berlin/Heidelberg: Springer. S. 33.

*Das Bild der ägyptischen Landvermesser habe ich entnommen:*
Gellert, Küstner u.a., Hgg. (1977): **Kleine Enzyklopädie Mathematik**. Thun/Frankfurt a.M.: Harri Deutsch. S. 829.

*Weitere Quellen:*

Hegel, G.W.F. (1989): **Vorlesungen über die Geschichte der Philosophie.** Teil 2. Griechische Philosophie. I. Thales bis Kyniker. Hgg. von P. Garniron und W. Jaeschke. Hamburg: Meiner.

Pappaioannu, Kostas (1988): **The Art and Civilization of Ancient Greece**. In: The Art of Greece. New York: Abrams. [Darin u.a. der Satz: „… the Greek temple is devoid of straight lines.“ ebd. p. 116].

Pichot, André (1991): **La naissance de la science**. Paris: Gallimard.

Toepliz, Otto (1949): **Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung**. Erster Band. Berlin: Springer. [Dort findet sich u.a. eine Diskussion des „ersten aller Unmöglichkeitsbeweise“: S. 2-6.]

## [Bibliographische Angaben]

Klaus Peters (2006):
**Was ist Dialektik?**
Teil 1.
Vortrag am Institut für Sozialwissenschaftliche Forschung, München.
<2006b_Dialektik>
HTML-Datei: http://klauspeters.com/s/2006b_Dialektik.htm
PDF-Datei: http://klauspeters.com/s/2006b_Dialektik.pdf
Version: 2007-06-15